جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

طبولوجيا (2)
ثالثة رياضيات
تموز ٢٠١٧

الاسم

الرقم

السؤال الأول : 34 علامة

أ. عرّف الآتي: ١. قاعدة الطبولوجيا، ٢. التطبيق المغلق، ٣. الفضاء الطبولوجي المتراص.

ب. أعط تعريفين متكافئين ل T_1 - فضاء.

ج. أعط مثالاً على T_1 - فضاء ولكنه ليس T_2 - فضاء.

د. أعط مثالاً على تطبيق تقابلي مستمر ولكنه ليس هوميومورفيزما.

السؤال الثاني : 32 علامة

لتكن $\Re$ مجموعة الأعداد الحقيقية، و τ طبولوجيا على $\Re$ مؤلفة من جميع المجموعات التي تحوي العدد 1 بالاضافة إلى المجموعة الخالية، أي: $\tau = \{u \subseteq \Re : 1 \in \Re\} \cup \{\phi\}$.

أ. علّل الآتي: ١. الفضاء $(\Re, \tau)$ مترابط، ٢. الفضاء $(\Re, \tau)$ معدود أول.

ب. بفرض $A = \{2,3,4,5\}$ مجموعة جزئية من $\Re$، أوجد A^o و $\overline{A}$ و A' و $Fr(A)$ و $Ext(A)$، ثمّ أوجد الطبولوجيا النسبية τ_A (أثر τ على A).

السؤال الثالث : 34 علامة

أ. إذا كان X فضاءً طبولوجياً معدوداً ثانياً، فأثبت أنه يمتلك مجموعة كثيفة قابلة للعد.

ب. أثبت أنّ الشرط اللازم والكافي لكي يكون الفضاء الطبولوجي X فضاء هاوسدورف هو ان تكون المجموعة:

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$$

مغلقة في فضاء الجداء $X^2 = X \times X$.

حمص في ٢٠١٧/٧/١٧

د. طالب غريبة و

(١) ٢/١

سلم تصحيح مقرر الطبولوجيا العامة (٢)
السنة الثالثة - رياضيات . الفصل الثاني ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول (٢٤ علامة):

أ- التعاريف: ١) ليكن (X, τ) فضاء طبولوجياً و $\mathcal{B}$ أسرة من المجموعات المفتوحة. نسمي الأسرة $\mathcal{B}$ قاعدة للطبولوجيا τ إذا كان أي عنصر من τ يساوي اجتماعاً لعناصر من $\mathcal{B}$. 4

٢) نسمي التطبيق $f: X \to Y$ تطبيقاً مغلقاً إذا كانت الصورة المباشرة وفقه لأي مجموعة مغلقة في X هي مجموعة مغلقة في Y، حيث X و Y فضاءان طبولوجيان. 4

٣) نسمي الفضاء الطبولوجي X فضاء متراصاً إذا كانت أي تغطية مفتوحة لهذا الفضاء تحتوي على تغطية جزئية منتهية. 4

ب- الفضاء T_1: هو الفضاء الطبولوجي الذي يحقق الموضوعة: من أجل أي نقطتين مختلفتين يوجد لكل منهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى. 4

تعريف مكافئ: يكون الفضاء X هو T_1 - فضاء إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\{x\}$ مغلقة أياً كان العنصر x من X. 4

ج- فضاء المتممات المنتهية هو T_1 - فضاء لأن المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ هي مجموعة مغلقة، من أجل أي x. ولكن هذا الفضاء ليس T_2 - فضاء لأن أي مجموعتين مفتوحتين فيه متقاطعتان، وبالتالي فإن أي جوارين لأي نقطتين لا بد أن يتقاطعا. 7

د- التطبيق المطابق $I: (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ حيث τ_1 - الطبولوجية القوية و τ_2 - الضعيفة هو تطبيق تقابلي مستمر (حيث $I(x) = x$) ولكنه ليس هوميومورفيزماً لأن التطبيق العكسي I^{-1} غير مستمر. 7

السؤال الثاني (٢٢ علامة):

أ- التعليل: ١) الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$ مترابط لأنه لا توجد فيه مجموعتان مفتوحتان غير خاليتين وغير متقاطعتين (أي مجموعتين مفتوحتين لا بدّ أن تتقاطعا مع الأقل بالعنصر ١). 5

٢) الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$ معدود أول، لأن أي نقطة من نقاطه مثل x تمتلك جملة أساسية قابلة للعد من الجوارات هي الجملة المكونة من المجموعة $\{x, 1\}$ أي $\{\{1, x\}\}$. 5

ب- $A^\circ = \Phi$ (4) ; $\overline{A} = A$ (4) ; $A' = \Phi$ (3)

$Fr(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = A$ (3) ; $Ext(A) = \mathbb{R} \setminus \overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$ (3)

الطبولوجيا النسبية:

$\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$

5 بما أن المجموعات $\{1,2\}$ و $\{1,3\}$ و $\{1,4\}$ و $\{1,5\}$ هي مجموعات مفتوحة في الفضاء الكلي فإن تقاطعاتها مع A هي المجموعات وحيدة العنصر $\{2\}$ و $\{3\}$ و $\{4\}$ و $\{5\}$، وهذا يؤدي إلى أن الطبولوجيا النسبية هي الطبولوجيا القوية (المتقطعة) على A.

السؤال الثالث (٢٤ علامة):

أ- بما أن الفضاء X هو معدود ثاني فإنه يمتلك قاعدة قابلة للعد ولتكن $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$، نختار من كل مجموعة U_i عنصراً x_i فنحصل على المجموعة: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ وهي قابلة للعد. إلا أنها مجموعة كثيفة لأنها تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة غير الخالية في هذا الفضاء (حسب تعريف قاعدة الطبولوجيا). 10

ب- البرهنة:

١- لزوم الشرط 12

٢- كفاية الشرط 12

أ.د. طالب غريبة

حمص في ٢٠١٧/٧/١٧